E4-00163 517570 Maths T	**Code épreuve :** 285	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2020
	Épreuve de : Mathématiques		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice I.

1)-

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/2 & 9/2 & 3 \end{pmatrix}$$

De même :

$$A^3 = A^2 . A = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 9 & 27/2 & 45/4 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 9 & 27/2 & 45/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 27/2 & 18 \\ 9 & 9 & 27/2 \\ 9 & 27/2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc : $A^3 - 3A^2 = I$

b). D'après la question précédente :

$$A^3 - 3A^2 = I \Rightarrow A(A^2 - 3A) = I$$

Donc, A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c)

n=input n(" entrer les coefficients de la matrice A").

A=[1, 2, 1 ; 1/2, 1, 2 ; 1, 1/2, 1]

disp(A)
end.

d)

n=input n(" entrer les coefficients de la matrice A").

A=[1, 2, 1; 1/2, 1, 2; 1, 1/2, 1]
inv(A)=N
disp(N)
end.

e)

n=input (" entrer la valeur de A).
A=[1, 2, 1; 1/2, 1, 2; 1, 1/2, 1].
inv(A)=(A^2)-3*A.
disp(inv(A))
end.

2) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 3$, $A^3 = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$.
Pour $n=3$:

$$3A^2 + \frac{9}{4}A^0 = \begin{pmatrix} 9 & 27/2 & 18 \\ 9 & 9 & 27/2 \\ 27/2 & 27/2 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/4 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$

Donc

$$3A^2 + \frac{9}{4}I = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/2 & 27/2 & 45/4 \end{pmatrix} = A^3$$

Donc, elle est vraie pour $n=3$.

Soit $n \geq 3$ fixé quelconque. Supposons pour le n que $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$

Et montrons que $A^{n+1} = 3A^n + \frac{9}{4}A^{n-2}$.

D'après l'hypothèse de la récurrence.

$$A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$$

$$\Rightarrow A.A^n = A\left(3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}\right)$$

$$\Rightarrow A^{n+1} = 3A^n + \frac{9}{4}A^{n-2}$$

Et selon le principe de la récurrence.

$$\forall n \geq 3. \quad A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$$

```
n= input('entrer une valeur pour n')
I= [1,0,0; 0,1,0; 0,0,1]
A= [1,2,1; 1/2,1,2; 1,1/2,1].
B= A^2.
   For k=3 : n.
      C= 3*B +(9/4)*I.
      I= A
      A= B
      B= C
   end
   disp (B).
```

3) a) D'après la question (2): $\forall n \geq 3$: $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3} \Rightarrow A^n - 3A^{n-1} - \frac{9}{4}A^{n-3} = 0$

Et en prenant $n=3$, on trouve: $A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I = 0$.

Donc, le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$ est un polynôme annulateur de A.

Et pour que λ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) soit une valeur propre de A, il faut que.

$$P(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynôme)
Et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}\right)' = 3x^2 - 6x.$$

Ainsi : $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$
$\Rightarrow 3x(x-2) = 0$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Traçons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

- $f(0) = -\frac{9}{4}$
- $f(2) =$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-9/4$	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(x - 3 - \frac{9}{4x^3}\right) = -\infty$.
- $f(0) = -\frac{9}{4}$
- $f(2) = -\frac{25}{4}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Montrons que l'équation $f(\lambda_0) = 0$ n'admet qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement ~~monotone~~ monotone sur cet intervalle (strictement croissante sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0,2]$), donc elle réalise une bijection de $[0,2]$ sur $f([0,2]) =]f(2), f(0)[$
$=]-\frac{25}{4}, -\frac{9}{4}[$.

Donc, l'équation $f(\lambda_0) = 0$ admet une unique solution $\lambda_0 \in]-\frac{25}{4}, -\frac{9}{4}[$.
Et puisque f est un polynôme caractéristique de A et n'admet qu'une seule solution $\lambda_0 \in]-\frac{25}{4}, -\frac{9}{4}[$
Donc, λ_0 est l'unique valeur propre de A.

Code épreuve : 289 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2020

Épreuve de : Mathématiques.

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4/. Soit D une matrice diagonale et P une matrice inversible telque: $D = P^{-1}AP$ (avec P^{-1} est la matrice inverse de P).

a)

$D^3 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A.A.A.P = P^{-1}A^3P$.

$D^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$.

Donc,

$$D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}D = P^{-1}A^3P - 3P^{-1}A^2P - \frac{9}{4}P^{-1}AP.$$

Et ~~puisque~~ On sait d'après ③ que $A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}A = 0$

Donc:

$$PD^3P^{-1} - 3PD^2P^{-1} - \frac{9}{4}PDP^{-1} = A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}A = 0,$$

Et puisque $P \neq 0$ et $P^{-1} \neq 0$

Donc.

$$P^{-1}PD^3P^{-1}P - 3P^{-1}PD^2P^{-1}P - \frac{9}{4}P^{-1}PDP^{-1}P = P^{-1}0P.$$

$$\Rightarrow D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}D = 0.$$

Et par conséquent:

$$A = D.$$

b) On sait d'après 4.a) que $A = D$

Et en supposant que.

$$D = P^{-1}AP.$$

$$\Rightarrow A = P^{-1}AP. \text{ , ce qui est impossible.}$$

Et par absurde, il n'existe pas une matrice diagonale D et une matrice inversible P telque.

$$D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}.$$

Donc, A n'est pas diagonalisable.

Exercice II.

1/ • X est la variable aléatoire correspondant au premier succès d'une épreuve à deux issues: échec: ~~obtenir une~~ face , succès: ~~obtenir une~~ pile. Cette épreuve est répétée jusqu'à l'apparition du premier pile. Ainsi, la probabilité de succès p: $p = \frac{1}{2}$.

• Y est la variable aléatoire correspondant au premier succès d'une épreuve à deux issues: échec: obtenir une pile ; succès: obtenir une face. Cette épreuve est répétée jusqu'à l'apparition de la première face. De même, la probabilité du succès est q. $q = \frac{1}{2}$.

Donc, les variables aléatoires X et Y suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

D'où:

$$E(X) = E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2. \qquad \text{Et} \qquad V(X) = V(Y) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2.$$

2/

$P((X=1)\cap(Y=1)) = 0$.

Car, lors du premier lancer, on ne peut obtenir que pile ou face. Mais on ne peut pas obtenir face et pile en même temps. Ainsi:

$$P((X=1)\cap(Y=1)) = P(X=1) \cdot P_{(X=1)}(Y=1) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

tandis que:

$$P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Et puisque:

$$P((X=1)\cap(Y=1)) \neq P(X=1) \cdot P_{(Y=1)}(Y=1)$$

Donc, les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

3/

a) Soit $j \geq 2$.

Si on obtient une pile dès le premier lancer. Donc, le lancer qui devra permettre d'obtenir une face sera effectué après le premier lancer. D'où:

$$P((X=1)\cap(Y=j)) = P(Y=j).$$

b) Soit $i \geq 2$.

Si on obtient une face dès le premier ~~tirage~~ lancer. Donc, le lancer qui devra permettre d'obtenir une pile sera effectué après le premier lancer (car ce dernier a déjà apporté un pile).

Donc. $P((X=i)\cap(Y=1)) = P(X=i)$

(c)

~~$P(XY)$~~ =
La variable aléatoire XY suit la loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$
Ainsi, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

d) Par définition, l'espérance de XY existe vu que $YX(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

$$E(XY) = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

(e) Selon la formule de Huygens König:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{4}{3} - 4 = \frac{-8}{3}$$

En outre:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y) = 4 - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$$

4).

(a)

La variable $X+Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$
Et $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Fin

Exercice 3.

1)- a). Soit $x \geq 1$ et $t \in [1, x]$.

$$t \in [1, x] \Rightarrow t \leq x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{x} e^t$$

Et par croissance de l'intégrale.

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt \geq \frac{1}{x}\int_1^x e^t\, dt.$$

Ainsi $\frac{1}{x}\int_1^x e^t\, dt = \frac{1}{x}(e^x - e) = \frac{e^x - e}{x}$

Donc.

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}.$$

b) D'après ce qui précède:

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$$

Or :

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x - e}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}\right) = +\infty$ $\left(\text{Car } \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (Croissance Comparée)}\right)$

Et par passage à la limite dans les inégalités, on trouve $\lim_{x \to +\infty} f(x) \geq \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x - e}{x}\right)$.
et selon le théorème de gendarme.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Code épreuve : 289 | Nombre de pages : 20 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) $\forall x \in [1, +\infty[$:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt.$$

On pose, la fonction G définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $G'(t) = \frac{e^t}{t}$.

Donc :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = \int_1^x G'(t)\,dt = G(x) - G(1).$$

Ainsi, $G(1) = l$ (avec $l \in \mathbb{R}$) et f est dérivable comme somme d'une fonction dérivable et d'une $G(1)$.

Donc : $f'(x) = (G'(x) - G'(1)) = G'(x) = \frac{e^x}{x}$. $(\forall x \in [1, +\infty[)$

d) D'après (c), $\forall x \in [1, +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x}{x}$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Ainsi :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Traçons le tableau de variation de f sur $[1, +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f''(x)$	0 +	
f	Point d'inflexion $A(1,0)$	Convexe.

$$f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t}\,dt = 0$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

e/ L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est.

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$\Rightarrow y = e(x-1)$$

2/ a) $\forall t \in [1, +\infty[$, $g(t) = \frac{e^t}{t^3}$

g est dérivable sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}^*$.

Et $g'(t) = \left(\frac{e^t}{t^3}\right)' = \frac{t^3 e^t - 3t^2 e^t}{t^6} = \frac{te^t - 3e^t}{t^4} = \frac{e^t(t-3)}{t^4}$

Ainsi: $g'(t) = 0 \Rightarrow \frac{e^t(t-3)}{t^4} = 0$

$\Rightarrow t - 3 = 0 \quad ((\text{car } e^t \geq e \text{ et } t^4 \geq 1)$

$\Rightarrow t = 3.$

Traçons le tableau de variation de g:

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\searrow$	$\frac{e^3}{9}$	$\nearrow$	
Signe de f		$-$	$\mid$	$-$	

. $f(1) = e$.

. $f(3) = \frac{e^3}{9}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (croissance comparée)

b/ Soit $t \in [1, 3]$.

$$1 \leq t \leq 3 \Rightarrow 1 \leq t^3 \leq 27$$

$$\Rightarrow \frac{1}{27} \leq \frac{1}{t^3} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^t}{t^3} \leq 1 \cdot e^t$$

Et par croissance de l'intégral, on trouve:

$$\int_1^3 0 \, dt \leq \int_1^3 \frac{e^t}{t^3} dt \leq \int_1^3 e^t \, dt$$

Ainsi :

$$\int_1^3 e^t\,dt = \left[e^t\right]_1^3 = e^3 - e.$$

Or $e^3 - e \geq 2e$ Car $e^3 - e - 2e = e^3 - 3e = e(e^2 - 3)$ Et on sait que $e^2 \geq 3$.
Donc :

$$0 \leq \int_1^3 g(t)\,dt \leq 2e \leq \int_1^3 e^t\,dt.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^3 g(t)\,dt \leq 2e.$$

c) $\forall t \in [3, x]$:

$$3 \leq t \leq x \Rightarrow e^3 \leq e^t \leq e^x \Rightarrow 0 \leq e^t \leq e^x. *$$

Et $0 \leq t \leq x - 3 \Rightarrow$
Donc :

$$0 \leq \int_3^x \frac{e^t}{t}\,dt \leq \int \frac{x-3}{x^3}\, e^x$$

3) a) $\forall x \in [1, +\infty[$. $\quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt.$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Et par intégration par partie, on trouve :

$$f(x) = \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{e^t}{t^2}\,dt = \frac{e^x}{x} - \frac{e}{1} - \left(-\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt\right) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt \; (+)$$

b) D'après 3.a), $\forall x \in [1, +\infty[$: $f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt.$
Calculons $\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt$.
On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{-2} \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -2t^{-3}. \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Et par intégration par partie, on trouve :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt = \left[t^{-2}e^t\right]_1^x - \int_1^x -2\frac{e^t}{t^3}dt.$$

$$= \frac{e^x}{x^2} - e + 2\int_1^x g(t)dt. \circledast$$

Et d'après ⊛ et ⊕, on trouve :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(t)dt.$$

4) a) D'après c), $\forall x \in [3, +\infty[$:

$$\int_3^x g(t)dt \leq \frac{x-3}{x^3}e^x$$

$$\Rightarrow \quad 2\int_3^x g(t)dt \leq \frac{x-3}{x^3}2e^x.$$

$$\Rightarrow \quad -2e + 2\int_3^x g(t)dt \leq \frac{x-3}{x^3}2e^x - 2e.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_3^x g(t)dt \leq \frac{x-3}{x^3}2e^x - 2e + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2}.$$

Et on sait d'après 3, b) que :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_3^x g(t)dt.$$

Donc :

$$f(x) \leq \frac{x-3}{x^3}2e^x - 2e + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2}. \oplus$$

Et on sait d'après 1.a) que $\forall x \in [3, +\infty[$.

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x} \quad \oplus$$

Et d'après ⊛ et ⊕, on trouve :

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x) \leq \frac{x-3}{x^3}2e^x + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e.$$

b) D'après 4.a), $\forall x \in [3, +\infty[$.

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x) \leq \frac{x-3}{x^3}2e^x + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e.$$

$$\Rightarrow \quad e^x - e \leq x f(x) \leq \frac{x-3}{x^2}2e^x + e^x + \frac{e^x}{x} - 2xe.$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{e}{e^x} \leq xe^{-x}f(x) \leq \frac{1}{xe^x} - \frac{3}{x^2e^x} + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2x}{e^x}e$$

Et on trouve :

12/

Code épreuve : 281 | Nombre de pages : 20 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{e}{e^{n}}\right)^{*}=1. \quad \left(\left(\text{car } \lim_{n\to+\infty}\frac{e}{e^{n}}=0 \ (\text{Croissance comparée})\right)\right)$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{ne^{n}}-\frac{3}{n^{2}e^{n}}+\frac{n}{n}-2\frac{n}{e^{n}}e\right)=1 \left(\left(\text{car } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{ne^{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^{2}e^{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{n}}e=0\right)\right)$$

Et par passage à la limite dans les inégalités, on trouve :

$$1\leq\lim_{n\to+\infty}ne^{-n}f(n)\leq 1.$$

Et selon le théorème de gendarme :

$$\lim_{n\to+\infty}ne^{-n}f(n)=1.$$

Exercice 4 :

1) a) Pour que le mobile puisse passer d'un point d'abscisse $i-1$ (avec $i\in\mathbb{N}^{*}$) à un autre point d'abscisse i sans retourner ~~et avec dangereuses~~ au point d'abscisse 0, il a une probabilité de : $\frac{i}{i+1}$.

Donc, d'après les données :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_{i}=i)=\frac{i}{i+1}.$$

De même, pour que le mobile puisse se déplacer au point d'abscisse 0, il a une probabilité de $\frac{1}{i+1}$, d'où :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_{i}=0)=\frac{1}{i+1}=1-P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_{i}=i)$$

b)

Pour que le mobile retourne sur le point d'abscisse 0 en instant k, il faut que soit il s'est déplacé entre les points d'abscisses l (avec $l\in\mathbb{N}^{*}$) ou qu'il ne s'est déplacé pas et donc, il est toujours sur le point d'abscisse 0. De ce fait :

$$(L=k)=\bigcap_{i=0}^{k-1}(A_{i}=i)\cap(A_{k}=0) \quad (\text{avec } l\in\mathbb{N}^{*})$$

c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{(A_{k-1}=k),(A_{k-1}=0)\}$ forme un système complet d'événements. Et en utilisant la formule des probabilités totales on trouve :

$$P(U=k) = P(A_{k-1}=k) \cdot P_{(A_{k-1}=k)}(A_{k+1}=k) + P(A_{k-1}=0) \cdot P_{(A_{k-1}=0)}(A_{k+1}=k)$$

$$= 0 \cdot P(A_{k-1}=k) + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)}$$

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(U=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Soit $n \geq 1$: sous réserve de convergence, on pose

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$ (Somme télescopique.

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} P(U=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(U=k) = 1.$$

e) $k \in \mathbb{N}^*$ la famille $\{(U=k),(U=0)\}$ forme un système complet d'événements. Et en utilisant la formule de Boole on trouve :

$$P((U=k) \cup (U=0)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(U=k) + P(U=0)$$ (loi incompatibilité des événements).

$$\Rightarrow 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(U=k) + P(U=0)$$

$$\Rightarrow P(U=0) = 0$$

2). $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(U \geq n) = 1 - P(U \leq n) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

3).

```
K=1
hasard= grand(1,1,'uin',1,K+1)
while hasard >< 0
    K=K+1
    hasard= K
end
disp(K,'U après l'valeur :')
```

4).

a).

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$ Et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

Donc, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $\forall x \geq 0$:

$x \geq 0$
$\Rightarrow x+1 \geq 1$
$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq 0$

Sous réserve de convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx \quad (\text{En utilisant la relation de Chasles}).$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

Soit $A \geq 0$:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

Or :

$$\int_0^A \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\int_0^A -(x+1)^{-2}\,dx$$

$$= -1 \left[(x+1)^{-1}\right]_0^A$$

$$= \frac{-1}{(A+1)} - 1\,(-1)$$

$$= 1 - \frac{1}{(A+1)}$$

Or : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A+1}\right) = 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

Et par conséquent, f est une ~~fonction de~~ densité de probabilité.

b)

Pour $x \leq 0$.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

Pour $x > 0$.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \int_0^x (t+1)^{-2}\,dt$

$$= \left[\frac{t}{t+1}\right]_0^x = \frac{x}{x+1}$$

<u>Bilan</u> :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$P(N=n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n-1) = P(n-1 \leq T \leq n+1-1)$

$= P(n-1 \leq T \leq n)$

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 20	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

d) En utilisant la fonction de répartition de la variable aléatoire T et ce qu'on a trouvé dans 5. a) On trouve :

$$P(N=n) = P(n-1 \leq T \leq n) = F(n) - F(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

Donc : $P(N=n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

c).

6) a) Soit $k \geq 1$ et $t \in [k, k+1]$

$t \in [k, k+1] \Rightarrow t \geq k$

$\Rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

Et par croissance de l'intégrale :

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1$$

Or : $\frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1 dt = \frac{1}{k} [u]_k^{k+1} = \frac{k+1-k}{k} = \frac{1}{k}$.

Donc : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Sous réserve de convergence.

~~$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_N(t)\, dt$~~ $E(N) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t(t+1)}\, dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1}\, dt$

Soit $A > 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t+1}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{t+1}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \ln(A+1) = +\infty$

Donc, N n'admet pas une espérance.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751